Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

Σ Χ Ο Λ Η   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Ω Ν
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν   Κ Α Ι   Φ Υ Σ Ι Κ Ω Ν   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ω Ν

Τ Ο Μ Ε Α Σ   Φ Υ Σ Ι Κ Η Σ

Κανονική εξέταση στο μάθημα   ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Διδάσκων: Κ. Χριστοδουλίδης   **7 Ιουλίου 2010**

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες   **Απαντήστε σε όλα τα θέματα**   **Τα θέματα είναι ισοδύναμα**

Θέμα 1. (α) Η διάμετρος του Γαλαξία μας είναι 100 000 έτη φωτός. Με ποια σταθερή ταχύτητα ως προς τον Γαλαξία θα πρέπει να κινείται ένας αστροναύτης για να διασχίσει τον Γαλαξία μας με ένα ταξίδι που για αυτόν θα διαρκέσει 50 χρόνια; [Δίνονται: Για $x \ll 1$, είναι $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ και $(1+x)^{-1} \approx 1-x$.]

(β) Ένα διαστημόπλοιο, Α, κινείται απομακρυνόμενο από τη Γη με ταχύτητα $V = c/\sqrt{2}$ ως προς αυτήν. Ένα δεύτερο διαστημόπλοιο, Β, πλησιάζει τη Γη πάνω στην ίδια ευθεία, με ταχύτητα $\upsilon = -c/\sqrt{2}$ ως προς αυτήν. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β όπως την μετρά παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α; Αν το μήκος ηρεμίας του διαστημοπλοίου Β είναι $l_0 = 48\ \text{m}$, ποιο είναι το μήκος του, l', όπως το μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;

Θέμα 2. (α) Εξηγήστε γιατί είναι αδύνατο να συγκρουστεί ένα φωτόνιο με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο και να του δώσει όλη του την ενέργεια.

(β) Το σωματίδιο α είναι ένας πυρήνας ηλίου, αποτελούμενος από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Να βρεθεί η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α. [Μάζες ηρεμίας: πρωτόνιο $m_p = 938{,}272\ \text{MeV}/c^2$, νετρόνιο $m_n = 939{,}565\ \text{MeV}/c^2$, σωματίδιο α $m_\alpha = 3727{,}379\ \text{MeV}/c^2$.]

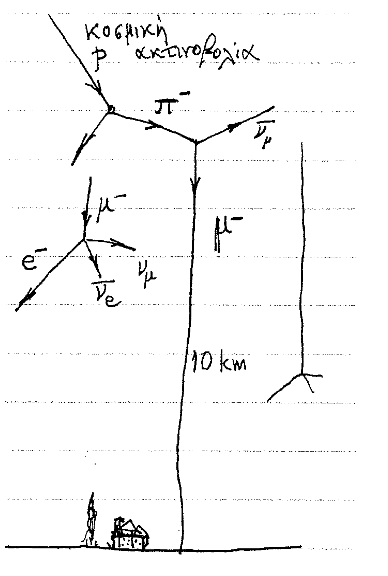
Θέμα 3. *Το «μεσονικό» παράδοξο. Διαστολή του χρόνου.* Η κοσμική ακτινοβολία (αποτελούμενη κυρίως από πρωτόνια) αλληλεπιδρά με τα άτομα του αέρα στα υψηλά στρώματα της ατμόσφαιρας και παράγει σωματίδια $\pi^\pm$. Αυτά στη συνέχεια διασπώνται σε μιόνια και νετρίνα ($\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$) με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_\pi = 25\ \text{ns}$. Τα μιόνια, στη συνέχεια, διασπώνται σε ηλεκτρόνια και νετρίνα ($\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_\mu = 2\ \mu\text{s}$.

Υποθέστε ότι όλα τα μιόνια παράγονται σε ένα ύψος 10 km και ότι έχουν όλα ανηγμένη ταχύτητα $\beta_\mu = 0{,}99$, κινούμενα κατακόρυφα προς τα κάτω. Υπολογίστε το ποσοστό των μιονίων που θα φτάσει στην επιφάνεια της Γης

(α) σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική και

(β) σύμφωνα με τη Σχετικιστική Μηχανική. Πόσο είναι το πάχος της ατμόσφαιρας στο σύστημα αναφοράς των μιονίων;

[Νόμος της ραδιενέργειας: $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$.]



Θέμα 4. Ένα μεσόνιο K^+, του οποίου η μάζα ηρεμίας είναι M_K ($M_\mathrm{K}c^2 = 494\ \text{MeV}$), κινείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και διασπάται σε δύο μεσόνια π. Το ένα π παραμένει ακίνητο. Η μάζα ηρεμίας του μεσονίου π είναι M_π ($M_\pi c^2 = 140\ \text{MeV}$). Ποια είναι η ολική ενέργεια του μεσονίου K^+ και ποια του κινούμενου μεσονίου π; [Επισημαίνεται ότι: $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$.]

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ $\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$

Τυπολόγιο

Σχετικιστική Κινηματική:

Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S, και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$, τότε:

$$x' = \gamma\left(x - Vt\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad \beta \equiv \frac{V}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Συστολή του μήκους: $\Delta l = \Delta l_0 / \gamma$ (Δl_0 = μήκος ηρεμίας)

Διαστολή του χρόνου: $\Delta t = \gamma\, \Delta t_0$ (Δt_0 = ιδιοχρόνος)

Μετασχηματισμός της ταχύτητας: $$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}}, \qquad \upsilon_y' = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon_z' = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}.$$

Σχετικιστική Δυναμική:

$m_0 = m(0) \qquad m = m(\upsilon) = \gamma m_0$ όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$, υ = ταχύτητα του σωματιδίου

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\boldsymbol{\upsilon}} = \gamma m_0 \vec{\boldsymbol{\upsilon}} \qquad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \qquad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Για φωτόνια: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} \qquad E = pc$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας: $p_x' = \gamma\left(p_x - VE/c^2\right) \quad p_y' = p_y \quad p_z' = p_z \quad E' = \gamma\left(E - Vp_x\right)$

Ισοδυναμία μάζας-ενέργειας: $\Delta E = \Delta m\, c^2$

Ηλεκτρομαγνητισμός:

Μετασχηματισμός του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$E_x' = E_x \qquad E_y' = \gamma\left(E_y - VB_z\right) \qquad E_z' = \gamma\left(E_z + VB_y\right)$$

$$B_x' = B_x \qquad B_y' = \gamma\left(B_y + VE_z/c^2\right) \qquad B_z' = \gamma\left(B_z - VE_y/c^2\right)$$

Θέμα 1. (α) Η διάμετρος του Γαλαξία μας είναι 100 000 έτη φωτός. Με ποια σταθερή ταχύτητα ως προς τον Γαλαξία θα πρέπει να κινείται ένας αστροναύτης για να διασχίσει τον Γαλαξία μας με ένα ταξίδι που για αυτόν θα διαρκέσει 50 χρόνια; [Δίνονται: Για $x \ll 1$, είναι $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ και $(1+x)^{-1} \approx 1-x$.]

(β) Ένα διαστημόπλοιο, Α, κινείται απομακρυνόμενο από τη Γη με ταχύτητα $V = c/\sqrt{2}$ ως προς αυτήν. Ένα δεύτερο διαστημόπλοιο, Β, πλησιάζει τη Γη πάνω στην ίδια ευθεία, με ταχύτητα $\upsilon = -c/\sqrt{2}$ ως προς αυτήν. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β όπως την μετρά παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α; Αν το μήκος ηρεμίας του διαστημοπλοίου Β είναι $l_0 = 48\ \text{m}$, ποιο είναι το μήκος του, l', όπως το μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;

ΛΥΣΗ

(α) Έστω ότι το διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα V ως προς τη Γη. Το ταξίδι θα διαρκέσει χρόνο $t = D/V$ για έναν παρατηρητή στη Γη, όπου D είναι η διάμετρος του Γαλαξία. Για κάποιον μέσα στο διαστημόπλοιο, το ταξίδι θα διαρκέσει χρόνο $t' = D/V\gamma$. Έτσι,

$$ct' = \frac{D}{\beta\gamma}, \qquad \beta\gamma = \frac{D}{ct'}, \qquad \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \left(\frac{D}{ct'}\right)^2, \qquad \frac{1}{\beta^2} = 1+\left(\frac{ct'}{D}\right)^2, \qquad \frac{1}{\beta} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{ct'}{D}\right)^2,$$

$$\beta = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{ct'}{D}\right)^2 = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{50}{100\,000}\right)^2, \qquad \beta = 1-1{,}25\times10^{-7} = 0{,}999\,999\,875\,.$$

Παρατήρηση: Είναι λάθος να γράψει κανείς προσεγγιστικά ότι $\boldsymbol{\beta \approx 0{,}999}$ ή $\boldsymbol{\beta \approx 1}$ ή κάτι άλλο. Όλη η ακρίβεια χρειάζεται για να βρεθεί η σωστή τιμή του γ.

(β) Στο σύστημα αναφοράς S της Γης, η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β είναι $\upsilon = -c/\sqrt{2}$. Στο σύστημα αναφοράς S΄ του διαστημοπλοίου Α θα είναι επομένως

$$\upsilon' = \frac{\upsilon - V}{1-\dfrac{\upsilon V}{c^2}} = \frac{-c/\sqrt{2}-c/\sqrt{2}}{1+c^2/2c^2} = \frac{-\sqrt{2}c}{3/2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}c$$

Στην ταχύτητα $\upsilon' = -\left(2\sqrt{2}/3\right)c$ που μετρά ο Α για τον Β, αντιστοιχεί παράγοντας Lorentz

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-(\upsilon'/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(2\sqrt{2}/3\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-8/9}} = 3\,.$$

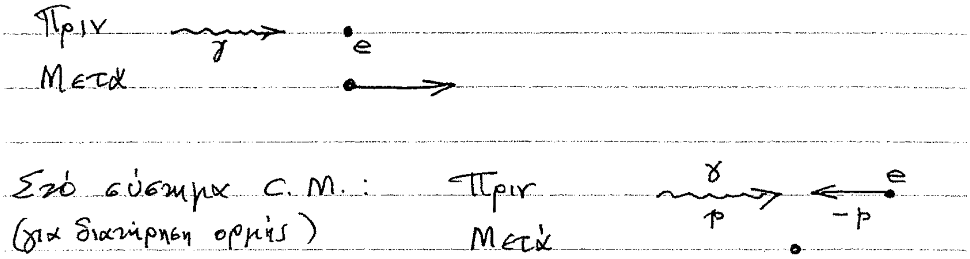
Επομένως $$l' = \frac{l_0}{\gamma'} = \frac{48}{3} = 16\ \text{m}\,.$$

Θέμα 2. (α) Εξηγήστε γιατί είναι αδύνατο να συγκρουστεί ένα φωτόνιο με ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο και να του δώσει όλη του την ενέργεια.

(β) Το σωματίδιο α είναι ένας πυρήνας ηλίου, αποτελούμενος από δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια. Να βρεθεί η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α. [Μάζες ηρεμίας: πρωτόνιο $m_p = 938{,}272\ \text{MeV}/c^2$, νετρόνιο $m_n = 939{,}565\ \text{MeV}/c^2$, σωματίδιο α $m_\alpha = 3727{,}379\ \text{MeV}/c^2$.]

ΛΥΣΗ

(α) Ένα φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο, και του δίνει όλη του την ενέργεια.



Στο σύστημα μηδενικής ορμής, για να διατηρείται η ορμή, θα πρέπει το ηλεκτρόνιο να είναι ακίνητο μετά την κρούση. Πριν όμως από την κρούση, στο ίδιο σύστημα, εκτός από το φωτόνιο υπήρχε και ένα κινούμενο ηλεκτρόνιο. Προφανώς η ενέργεια δεν διατηρείται αφού ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο έχει λιγότερη ενέργεια από ένα αρχικά κινούμενο ηλεκτρόνιο. Άρα το φαινόμενο είναι αδύνατο να συμβεί.

(β) Η αντίδραση «σχηματισμού» ενός σωματιδίου α είναι: $2\text{p} + 2\text{n} \rightarrow \alpha + Q$.

Q είναι η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α και εκλύεται κατά τον σχηματισμό του.

Η διατήρηση μάζας-ενέργειας δίνει: $2m_\text{p}c^2 + 2m_\text{n}c^2 = m_\alpha c^2 + Q$

$$Q = \frac{1}{c^2}\left(2m_\text{p} + 2m_\text{n} - m_\alpha\right) = \frac{\Delta M}{c^2}$$

όπου ΔM είναι το έλλειμμα μάζας $\Delta M = 2m_\text{p} + 2m_\text{n} - m_\alpha$.

Η μάζα του σωματιδίου α μπορεί να βρεθεί από αυτήν του ατόμου του Ηλίου-4 αν αφαιρέσουμε τη μάζα δύο ηλεκτρονίων και αγνοήσουμε την ενέργεια σύνδεσής τους στον πυρήνα του Ηλίου, η οποία είναι μικρή σε σύγκριση με τις άλλες ενέργειες:

$$m_\alpha = m_\text{He} - 2m_\text{e}.$$

Επομένως $\Delta M = (2\times 1{,}007\,276 + 2\times 1{,}008\,665) - (4{,}002\,604 - 2\times 0{,}000\,549)$

$$\Delta M = 4{,}031\,882 - 4{,}001\,506 \qquad \Delta M = 0{,}030\,376\ \text{u}.$$

Από την ισοδυναμία $1\ \text{u} \equiv 931{,}478\ \text{MeV}$

Προκύπτει ότι $Q = 0{,}0304 \times 931 = 28{,}3\ \text{MeV}$

Η ενέργεια σύνδεσης του σωματιδίου α είναι: $28{,}3\ \text{MeV}$

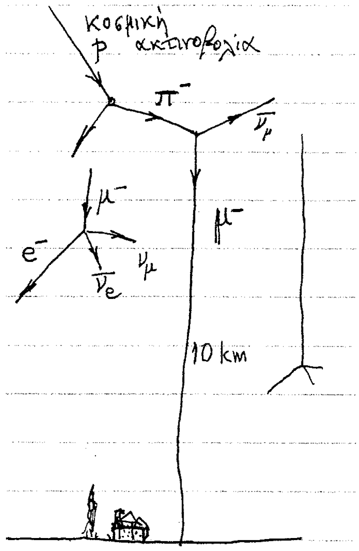
Θέμα 3. *Το «μεσονικό» παράδοξο. Διαστολή του χρόνου.* Η κοσμική ακτινοβολία (αποτελούμενη κυρίως από πρωτόνια) αλληλεπιδρά με τα άτομα του αέρα στα υψηλά στρώματα της ατμόσφαιρας και παράγει σωματίδια $\pi^{\pm}$. Αυτά στη συνέχεια διασπώνται σε μιόνια και νετρίνα ($\pi^{-} \to \mu^{-} + \bar{\nu}_{\mu}$) με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_{\pi} = 25\ \text{ns}$. Τα μιόνια, στη συνέχεια, διασπώνται σε ηλεκτρόνια και νετρίνα ($\mu^{-} \to e^{-} + \bar{\nu}_{e} + \nu_{\mu}$) με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_{\mu} = 2\ \mu\text{s}$.

Υποθέστε ότι όλα τα μιόνια παράγονται σε ένα ύψος 10 km και ότι έχουν όλα ανηγμένη ταχύτητα $\beta_{\mu} = 0{,}99$, κινούμενα κατακόρυφα προς τα κάτω. Υπολογίστε το ποσοστό των μιονίων που θα φτάσει στην επιφάνεια της Γης

(α) σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική και

(β) σύμφωνα με τη Σχετικιστική Μηχανική. Πόσο είναι το πάχος της ατμόσφαιρας στο σύστημα αναφοράς των μιονίων;

[Νόμος της ραδιενέργειας: $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$.]



ΛΥΣΗ

(α) *Κλασική Μηχανική*

Επειδή είναι $\beta_{\mu} c \tau_{\mu} = 0{,}99 \times 3 \times 10^{8} \times 2 \times 10^{-6} = 600\ \text{m}$, αυτή είναι η *μέση* απόσταση που θα διανύσουν τα μιόνια πριν διασπαστούν, σύμφωνα με την Κλασική Μηχανική. Ο χρόνος που χρειάζονται τα μιόνια για να διανύσουν απόσταση 10 km είναι $t = 10\ \text{km} / 0{,}99c = 33\ \mu\text{s}$. Το ποσοστό των σωματιδίων που επιζούν σε χρόνο t μετά τη δημιουργία τους δίνεται από τη γενική σχέση

$$N / N_0 = \mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Για $\tau = \tau_{\mu} = 2\ \mu\text{s}$ και $t = 33\ \mu\text{s}$, βρίσκουμε

$$N / N_0 = \mathrm{e}^{-33/2} = 7 \times 10^{-8}.$$

Δηλαδή, λιγότερο από ένα μ^{-} στα 10^{7} θα επιζήσει για αρκετό χρόνο ώστε να φτάσει στην επιφάνεια της Γης.

(α) *Σχετικιστική Μηχανική*

Στη σχέση $N / N_0 = \mathrm{e}^{-t/\tau}$, τα t και τ πρέπει να δίνονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Οι σταθερές τ για τα σωματίδια δίνονται στο σύστημα ηρεμίας τους. Θα υπολογίσουμε επομένως και το t στο σύστημα ηρεμίας των μιονίων. Αν στο σύστημα του εργαστηρίου (Γης) είναι $t = 33\ \mu\text{s}$ και $\beta_{\mu} = 0{,}99$, $\gamma_{\mu} = 7{,}07$, τότε ο χρόνος που απαιτείται για τα σωματίδια να διανύσουν την απόσταση μέχρι τη Γη είναι, στο δικό τους σύστημα αναφοράς, $t_0 = t / \gamma_{\mu} = 33 / 7{,}07 = 4{,}7\ \mu\text{s}$. Επομένως,

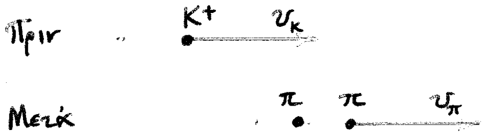
$$N / N_0 = \mathrm{e}^{-4{,}7/2} = 0{,}095.$$

Δηλαδή, ένα μ^{-} στα 10 θα επιζήσει για αρκετό χρόνο ώστε να φτάσει στην επιφάνεια της Γης, σύμφωνα με την Ειδική θεωρία της Σχετικότητας.

Για τα μ^{-}, η ατμόσφαιρα φαίνεται να έχει πάχος $10\ \text{km} / \gamma_{\mu} = 1{,}4\ \text{km}$ και την βλέπουν να τα πλησιάζει με ταχύτητα $V = \beta_{\mu} c = 0{,}99c$.

Θέμα 4. Ένα μεσόνιο K^+, του οποίου η μάζα ηρεμίας είναι M_K ($M_K c^2 = 494$ MeV), κινείται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου και διασπάται σε δύο μεσόνια π. Το ένα π παραμένει ακίνητο. Η μάζα ηρεμίας του μεσονίου π είναι M_π ($M_\pi c^2 = 140$ MeV). Ποια είναι η ολική ενέργεια του μεσονίου K^+ και ποια του κινούμενου μεσονίου π; [Επισημαίνεται ότι: $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$.]

ΛΥΣΗ



Έστω ότι οι ταχύτητες των σωματιδίων αρχικά και τελικά είναι $\upsilon_K = c\beta_K$ και $\upsilon_\pi = c\beta_\pi$, αντίστοιχα, στις οποίες αντιστοιχούν οι παράγοντες Lorentz γ_K και γ_π. Οι νόμοι της διατήρησης δίνουν:

διατήρηση της ορμής $$M_K \gamma_K \beta_K = M_\pi \gamma_\pi \beta_\pi \qquad (1)$$

διατήρηση της ενέργειας $$M_K \gamma_K c^2 = M_\pi c^2 + M_\pi \gamma_\pi c^2 \qquad (2)$$

Υψώνοντας την εξίσωση (1) στο τετράγωνο και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\beta^2\gamma^2 = \gamma^2 - 1$ έχουμε

$$M_K^2\left(\gamma_K^2 - 1\right) = M_\pi^2\left(\gamma_\pi^2 - 1\right) \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (2), $M_K \gamma_K = M_\pi (1 + \gamma_\pi)$ ή $\gamma_K = \dfrac{M_\pi}{M_K}(1 + \gamma_\pi)$.

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3), έχουμε

$$M_K^2\left(\frac{M_\pi^2}{M_K^2}(1+\gamma_\pi)^2 - 1\right) = M_\pi^2\left(\gamma_\pi^2 - 1\right)$$

$$M_\pi^2(1 + 2\gamma_\pi + \cancel{\gamma_\pi^2}) - M_K^2 = M_\pi^2\left(\cancel{\gamma_\pi^2} - 1\right), \qquad 2\gamma_\pi + 1 = \frac{M_K^2}{M_\pi^2} - 1$$

και $$\gamma_\pi = \frac{M_K^2}{2M_\pi^2} - 1, \qquad \gamma_K = \frac{M_\pi}{M_K}\frac{M_K^2}{2M_\pi^2} = \frac{1}{2}\frac{M_K}{M_\pi}.$$

Αριθμητικά, $\beta_K = 0{,}824$, $\gamma_K = 1{,}764$, $\beta_\pi = 0{,}982$ και $\gamma_\pi = 5{,}225$, και επομένως είναι

$$E_K = M_K \gamma_K c^2 = 494 \times 1{,}764 = 872 \text{ MeV} \quad \text{και} \quad E_\pi = M_\pi \gamma_\pi c^2 = 140 \times 5{,}225 = 732 \text{ MeV}.$$

Όπως πρέπει, είναι $$E_K = E_\pi + M_\pi c^2 = 872 \text{ MeV}.$$